



Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias  
Universidad Autónoma de Madrid

# Geometría pseudo-Riemanniana y espacio-tiempo de Schwarzschild

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

*Autor:* Ángel Alberto Carretero Ramos

*Tutor:* Ángel González Prieto

*Universidad Complutense de Madrid*

Curso 2021-2022



## Resumen

El principal objetivo de este trabajo es dar una introducción a la Relatividad General desde un punto de vista geométrico. En particular, por su sencillez e importancia, introduciremos el espacio-tiempo de Schwarzschild y su métrica asociada. Para ello, proporcionaremos una derivación rigurosa y completa de la métrica de Schwarzschild y del cálculo de trayectorias geodésicas. Asimismo, cubriremos el marco teórico necesario desarrollando los principales conceptos de geometría pseudo-Riemanniana, tales como métrica y conexión, y analizaremos varios resultados importantes como el Teorema de Fundamental de la Geometría pseudo-Riemanniana.

## Abstract

The main objective of this work is to introduce general relativity from a geometric perspective. Specifically, because of both its simplicity and importance, we will cover Schwarzschild spacetime and its associated metric. In order to do that, we will provide a rigorous and complete derivation of the metric and of the geodesic trajectories. Moreover, we will cover the necessary theory developing the main concepts from Riemannian geometry, such as metric and connection, and several important results such as the Fundamental Theorem of pseudo-Riemannian geometry.



# Índice general

---

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Conexión</b>	<b>5</b>
2.1	Conexión afín o derivada covariante . . . . .	5
2.2	Transporte paralelo . . . . .	8
2.3	Curvatura . . . . .	10
2.4	Torsión . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Variedades (pseudo-)Riemannianas</b>	<b>13</b>
3.1	Métrica . . . . .	13
3.2	Signatura de la métrica . . . . .	14
3.3	Geodésicas . . . . .	15
3.4	Compatibilidad de la métrica y la conexión . . . . .	16
3.5	Más curvaturas . . . . .	18
3.6	Isometrías . . . . .	19
3.7	Más conceptos geométricos . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Espacio-tiempo</b>	<b>21</b>
4.1	Métrica de Schwarzschild . . . . .	22
4.1.1	Espacio-tiempo estático y estacionario . . . . .	23
4.1.2	Simetría esférica . . . . .	25
4.1.3	Solución de las ecuaciones de Einstein . . . . .	28
4.2	Geodésicas de Schwarzschild . . . . .	30
4.2.1	Cantidades conservadas y simplificaciones . . . . .	31
4.2.2	Orbitas y potencial . . . . .	32
	<b>Bibliografía</b>	<b>35</b>
<b>A</b>	<b>Conceptos previos de geometría diferencial</b>	<b>37</b>
<b>B</b>	<b>Notación y tensores</b>	<b>41</b>
B.1	Tensores . . . . .	41
B.2	Notación . . . . .	42



# CAPÍTULO 1

## Introducción

---

En 1915 Einstein presentó la Teoría de la Relatividad General que se ha convertido en la descripción de la gravedad y del universo. La idea nace mucho antes cuando en 1907 Einstein intenta conciliar la gravedad Newtoniana y su teoría de la Relatividad Especial de 1905. Pronto se da cuenta de que no basta con modificarlas, sino que es necesario crear unos nuevos cimientos. Pasa varios años trabajando desde la física y desde las matemáticas buscando objetos que preserven los postulados físicos, pero que tengan buenas propiedades matemáticas, como ser invariantes por cambio de coordenadas. Lo que ata a Einstein es su desconocimiento del marco matemático adecuado: la Geometría pseudo-Riemanniana que había sido desarrollada años antes de mano de Christoffel, Levi-Civita y del propio Riemann.

Por eso, los objetivos de este trabajo son dos. El primero y principal es dar una introducción a ese marco, a la geometría pseudo-Riemanniana y a la propia Relatividad General. Para esto último, hemos elegido el espacio-tiempo de Schwarzschild por ilustrativo a la par que sencillo. Además, queremos ver la teoría desde un punto de vista geométrico, acercándonos al lado matemático y obviando el físico. Siguiendo esta línea, el segundo objetivo es cubrir toda la base matemática con suficiente rigor, ya que a menudo se utilizan argumentos geométricos e intuitivos para justificar ideas importantes. Por ejemplo, las referencias habituales [1], [2], [3] usan este tipo de argumentarios para derivar la métrica de Schwarzschild. En contraste, en este trabajo se dará una derivación completa y detallada de ésta y así como de otras ideas.

El texto como tal está dividido en dos grandes bloques. El primero presenta los conceptos más relevantes de la geometría Riemanniana para la relatividad. Empezaremos con el [Capítulo 2](#) definiendo la conexión  $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^{p,q}M) \rightarrow \Gamma(T^{p,q}M)$  que, informalmente, nos permite “derivar” sobre la variedad. No es una noción inherente, sino que podemos definirla con cierto grado de libertad. Veremos que este grado quedará determinado cuándo expresemos  $\nabla$  en coordenadas en función de  $\Gamma^i_{jk}$ , los coeficientes de la conexión.

Usándola en la [Sección 2.2](#), definimos las curvas autoparalelas o líneas rectas: curvas  $\gamma$  que cumplen  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ ; y también definimos el transporte paralelo de un vector de un espacio tangente a otro. Culminaremos el capítulo en la [Sección 2.3](#) definiendo una noción crucial: la curvatura Riemanniana  $R$ , un tensor-(1, 3) que mide cómo fallan en conmutar las derivadas cruzadas o, equivalentemente, cómo se desvía

el transporte paralelo en una región infinitesimal.

$$R(\omega, X, Y; Z) = \omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z).$$

También se definirá la torsión en la [Sección 2.4](#) que, posteriormente, servirá para enunciar el Teorema Fundamental de la Geometría (pseudo-)Riemanniana.

En el capítulo [Capítulo 3](#) introduciremos la noción de métrica,  $g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \mathbb{R}$ . Se trata de un tensor-(1, 2) que, informalmente, nos permitirá “medir” distancias sobre la variedad. Más adelante, en la [Sección 3.1](#), presentaremos una herramienta conocida como subir/bajar índices que utilizaremos asiduamente en el resto del trabajo. Después, en la [Sección 3.4](#), presentaremos el Teorema Fundamental de la Geometría Riemanniana cuya importancia es patente hasta en su nombre.

**Teorema (Teorema Fundamental de la Geometría (pseudo-)Riemanniana).** *Toda variedad (pseudo-)Riemanniana tiene una única conexión de compatible con la métrica y de torsión cero.*

Dar la conexión del teorema anterior,  $\nabla^{LC}$ , conocida como conexión de Levi-Civita, nos permitirá simplificar mucho algunos cálculos muy importantes como las geodésicas, las curvas que minimizan distancias ([Sección 3.3](#)); ya que, bajo la conexión de compatibilidad, son exactamente las líneas rectas ( $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ ). También gracias a la compatibilidad, en la [Sección 3.5](#) definimos, con  $g$  y  $\nabla^{LC}$ , nuevas curvaturas que nos posibilitarán entender finalmente las ecuaciones de Einstein:

Tensor de curvatura de Riemann	$R_{abcd} = g_{am} R_{bcd}^m$
Tensor de Ricci	$R_{ab} = R_{amb}^m$
Curvatura escalar	$R = g^{ab} R_{ab}$

Nótese que se hace uso de tanto el convenio de índices de Penrose como de la notación de Einstein ([Sección B.2](#)). Para finalizar el bloque se definen las isometrías ([Sección 3.6](#)) y se caracterizan las simetrías de la variedad gracias a la derivada de Lie  $\mathcal{L}$  y los vectores de Killing ([Sección 3.7](#)). Intuitivamente, preservan la métrica cuando nos movemos en la dirección del flujo de  $K$ .

**Definición (Campo de Killing).** Un campo vectorial  $K$  se dice de Killing si:

$$\mathcal{L}_K g = 0,$$

donde  $\mathcal{L}$  es la derivada de Lie.

Finalizado el primer bloque, comenzamos el segundo en el [Capítulo 4](#) presentando las afamadas ecuaciones de Einstein:

**Definición (Ecuaciones de campo de Einstein).** Sea  $M$  una variedad equipada con un tensor-(0, 2)  $T$  llamado tensor de energía impulso. Se dice que una métrica pseudo-Riemanniana  $g$  satisface las ecuaciones del campo de Einstein si:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu},$$

Tras una breve introducción, en la siguiente sección, [Sección 4.1](#) cumplimos otro de nuestros objetivos: dar una derivación rigurosa de la métrica de Schwarzschild. Gracias a los campos de Killing podemos escribir con precisión las hipótesis de Schwarzschild y, tras una ardua demostración, culminamos con el siguiente resultado:

**Teorema.** *Si tenemos un espacio-tiempo estático y estacionario sobre  $\mathbb{R}^4$ , con un espacio esféricamente simétrico, podemos elegir coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  para que  $g$  tenga la siguiente forma (como tensor- $(0, 2)$  simétrico):*

$$(1.1) \quad g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - 2m/r} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ .

En el resto del capítulo, a lo largo de la [Sección 4.2](#), derivamos las ecuaciones de las geodésicas y, nuevamente, gracias a los vectores de Killing, podemos encontrar simplificaciones de manera rigurosa sin tener que recurrir a argumentos físicos. Para esto nos apoyamos en la siguiente proposición:

**Teorema.** *Sea  $K$  un campo de Killing para la métrica  $g$  con  $\gamma$  una geodésica. Entonces  $g(K, \dot{\gamma})$  se conserva a lo largo de  $\gamma$ .*

El resultado es reducir el sistema de EDOs de segundo grado a uno de primer orden al expresar las geodésicas en función de una energía total conservada y de un potencial gravitatorio relativista. Con esta caracterización, podemos calcular numéricamente todos los tipos de geodésicas con facilidad, y describir cómo se movería una partícula en el espacio-tiempo de Schwarzschild o, desde un punto de vista matemático, describir geoméricamente el espacio.

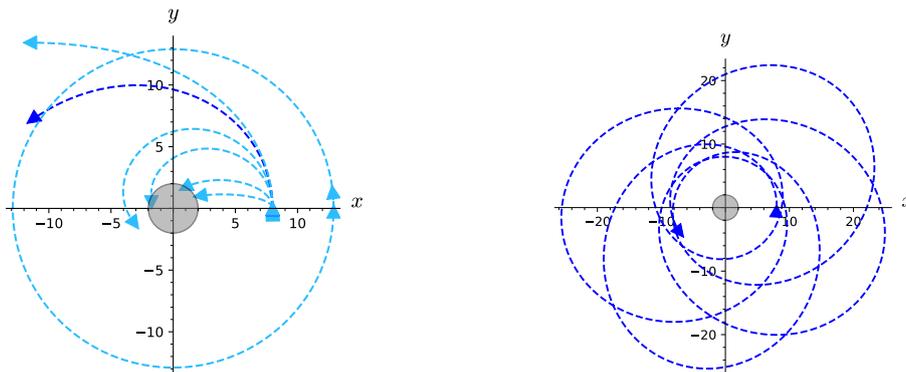


Figura 1.1: Izquierda: geodésicas para varios datos iniciales. Derecha: aplicación de la geodésica destacada en azul oscuro.

Cerramos con el cálculo visual de varios tipos de geodésicas y viendo como permean el espacio. En la [Figura 1.1](#) vemos los distintos tipos de trayectorias junto con una ampliación en la que se aprecia lo caótico que puede ser el recorrido que sigue un cuerpo en el espacio.



## CAPÍTULO 2

# Conexión

---

El objetivo de este capítulo es tomar nuestra variedad diferenciable y añadirle una nueva estructura que nos permita “derivar”: la conexión. Veremos que, intuitivamente, fijar la conexión da forma a la variedad determinando las “líneas rectas”. Más adelante, la usaremos para comparar vectores tangentes de espacios vectoriales distintos y, cuantificando cómo varía el vector al moverlo, definiremos la curvatura. Por último, definiremos la torsión, un tensor que será de utilidad para enunciar el Teorema Fundamental de la Geometría (pseudo-)Riemanniana en el siguiente capítulo.

Las principales referencias de este capítulo son [4, caps. 1, 2] y [5, caps. 7, 8]. Preferiremos esta última ya que está enfocada hacia la relatividad, por lo que muchas definiciones concuerdan mejor con nuestros objetivos. Cabe destacar también que se utilizará [6] como material auxiliar.

Fijamos la siguiente notación:

- Denotaremos una variedad diferencial como  $(M, \mathcal{A})$  donde  $M$  es el espacio topológico ambiente y  $\mathcal{A}$  es un atlas diferenciable. Es decir, toda carta  $(U_i, x_i) \in \mathcal{A}$  cumple  $x_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  homeomorfismo con su imagen y para toda combinación de  $i$  y  $j$ ,  $x_i \circ x_j^{-1}$  es suave. A menudo usaremos únicamente  $M$  para referirnos a la variedad y no nombraremos al atlas explícitamente.
- $T^{p,q}M$  es el fibrado tensorial de valencia  $(p, q)$  de  $M$ . En el caso particular del fibrado tangente escribiremos  $TM$  sin superíndices, y en el caso del cotangente  $T^*M$ .
- $\Gamma(T^{p,q}M)$  es una sección del fibrado tensorial de  $M$ . Se puede entender como el conjunto de campos tensoriales  $(p, q)$  sobre  $M$ .

Para más información, el lector puede consultar el [Apéndice A](#).

### 2.1. Conexión afín o derivada covariante

**Definición 2.1 (Conexión afín / Derivada covariante).** Dada una variedad  $M$ , una conexión afín es una función  $\nabla$  que toma un campo vectorial y un campo tensorial

$(p, q)$  y produce un campo tensorial  $(p, q)$ :

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^{p,q}M) &\rightarrow \Gamma(T^{p,q}M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y,\end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(M)$ , entonces  $\nabla_X f = X(f)$ .
2.  $\nabla_X(T + S) = \nabla_X T + \nabla_X S$ .
3. (Regla de Liebniz)<sup>1</sup> Si  $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Gamma(T^*M)$ ,  $Y_1, \dots, Y_q \in \Gamma(TM)$ ,

$$\begin{aligned}\nabla_X(T(\omega_1 \cdots \omega_p, Y_1 \cdots Y_q)) &= (\nabla_X T)(\omega_1, \dots, \omega_p, Y_1 \cdots Y_q) \\ &\quad + T(\nabla_X \omega_1, \dots, \omega_p, Y_1, \dots, Y_q) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + T(\omega_1, \dots, \omega_p, Y_1, \dots, \nabla_X Y_q).\end{aligned}$$

4. Si  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\nabla_{fX+Y}T = f\nabla_X T + \nabla_Y T$ .

Dependiendo del uso que se le dé, se suele usar de forma intercambiable “derivada covariante” o “conexión afín”.

La pregunta que nos hacemos ahora es si tenemos libertad para elegir una conexión  $\nabla$  o si viene dada por la estructura de variedad. Lo podemos ver con un ejemplo:

**Ejemplo 2.2.** Vamos a hacer el cálculo en coordenadas de  $\nabla_X Y$  donde  $X, Y \in \Gamma(TM)$ . Las coordenadas son las canónicas  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ :

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_{X_i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= X_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( Y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) && \text{(Propiedad 4)} \\ &= X_i \cdot \left( \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y_j \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) && \text{(Propiedad 3)} \\ &= X_i \cdot \left( \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y_j \cdot \Gamma_{ji}^q \frac{\partial}{\partial x^q} \right).\end{aligned}$$

En el último paso, hemos usado que  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$  es un campo vectorial y tiene una expresión en coordenadas usando las funciones  $\Gamma_{ji}^q$  que reciben el nombre de Símbolos de Christoffel.

<sup>1</sup>Se puede reescribir de manera mucho más sucinta utilizando el producto tensorial donde  $\phi$  y  $\psi$  son tensores cualesquiera:

$$\nabla_X(\phi \otimes \psi) = (\nabla_X \phi) \otimes \psi + \phi \otimes (\nabla_X \psi).$$

**Definición 2.3 (Símbolos de Christoffel).** Dada una variedad  $M$  de dimensión  $n$  y una conexión  $\nabla$ , los Símbolos de Christoffel con respecto a unas coordenadas  $(U, x)$  son las  $n^3$  funciones:

$$\Gamma_{ij}^q : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \left( dx^q \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right)_p .$$

**Teorema 2.4.** *Los Símbolos de Christoffel determinan totalmente la conexión  $\nabla$ .*

*Demostración.* Obsérvese que, en virtud del [Ejemplo 2.2](#), los Símbolos de Christoffel determinan la conexión para campos vectoriales. Ahora calcularemos la expresión en coordenadas para un campo covectorial. Primero, observamos que:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \left( dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \delta_{ij} = 0 .$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \left( dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) = \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} dx^i \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + dx^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} dx^i \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + dx^i \left( \Gamma_{jm}^q \frac{\partial}{\partial x^q} \right) \\ &= \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} dx^i \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + \Gamma_{jm}^i . \end{aligned}$$

y, despejando, llegamos a:

$$\left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^m}} dx^i \right)_j = -\Gamma_{jm}^i .$$

Usando la [Definición 2.1](#), prop. [3](#) podemos calcular  $\nabla$  para un tensor- $(p, q)$  arbitrario en función de la expresión para vectores y covectores; por lo que queda determinado enteramente por los Símbolos de Christoffel.  $\square$

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\mathbb{S}^2$  la esfera. En coordenadas esféricas  $x(p) = (\theta(p), \phi(p))$ , prescribimos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1(x^{-1}(\theta, \phi)) &= -\sin \theta \cos \theta , \\ \Gamma_{12}^2(x^{-1}(\theta, \phi)) &= \Gamma_{21}^2(x^{-1}(\theta, \phi)) = -\cot \theta , \end{aligned}$$

y el resto de coeficientes nulos. Esta conexión da lugar a lo que llamamos “esfera redonda”. En las imágenes que veremos más adelante se corresponde con la [Figura 2.3b](#) y la [Figura 2.3c](#).

Por último, podemos dar una interpretación geométrica muy visual de la derivada covariante gracias al Teorema de Encaje de Whitney [[7](#), pág. 31] que nos garantiza que si tenemos una variedad siempre podemos encajarla en  $\mathbb{R}^N$  para un  $N$ . Entonces,  $\nabla$  es la proyección de la derivada usual sobre el plano tangente ([[8](#), págs. 155, 156]). Es decir, sólo nos quedamos con la parte de la derivada “intrínseca” o tangente a la superficie ([Figura 2.1](#)).

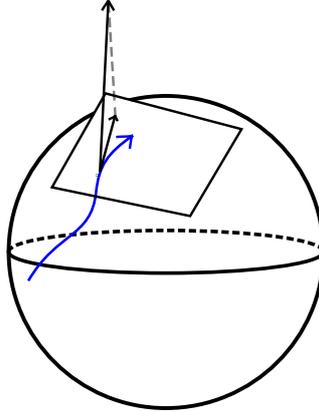


Figura 2.1: Si embebemos la variedad en  $\mathbb{R}^n$ , podemos pensar en  $\nabla$  como la proyección del vector tangente a la curva sobre el plano tangente a la superficie.

## 2.2. Transporte paralelo

El transporte paralelo nos permite tomar un vector  $v$  de  $T_p M$  y transportarlo hasta  $T_q M$  (Figura 2.4c). Veremos en (Sección 2.3) que podemos capturar la forma de la superficie midiendo cómo se desvía el transporte paralelo. Además, las demostraciones en este capítulo nos servirán para probar resultados auxiliares como Corolario 2.9 que necesitaremos cuando hablemos de relatividad.

**Definición 2.6 (Curvas autoparalelas (líneas rectas)).** Dada una variedad  $M$  con conexión  $\nabla$  diremos que una curva  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$  es autoparalela si:

$$\nabla_{\dot{\varphi}(t)} \dot{\varphi}(t) = 0,$$

donde  $\dot{\varphi}$  es el campo vectorial definido sólo a lo largo de la curva  $\varphi$  y que en cada punto se le asigna su vector tangente (Ecuación A.1).

Esta definición es parecida a la que esperaríamos para las geodésicas. Sin embargo, las geodésicas dependen de la curva y también de la parametrización. Por eso no podremos definir las hasta que tengamos alguna manera de medir distancias en nuestra variedad.

**Definición 2.7 (Transporte paralelo).** Dada una variedad  $M$  con conexión  $\nabla$  y una curva  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$ , fijamos un tiempo  $t_0$  y un vector  $Z_0 \in T_{\varphi(t_0)} M$ . Se llama transporte paralelo a un campo  $Z$  que cumple:

1.  $Z(t_0) = Z_0$ .
2.  $(\nabla_{\dot{\varphi}} Z) \Big|_{\varphi(t)} = 0$ .

Es muy importante notar que en 2 sólo estamos considerando el campo sobre la curva, ya que, en general, no podemos encontrar un transporte paralelo en todo un entorno de un punto.

**Observación.** Si cumple 2 en la definición anterior, se dice que el campo es paralelo a la curva  $\varphi$ .

**Teorema 2.8.** *Bajo las condiciones de Definición 2.7, siempre existe  $Z$  transporte paralelo y es único.*

*Demostración.* Primero, probamos que  $Z$  existe en unas coordenadas  $(U, x)$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\varphi}}(Z) \Big|_{\varphi(t)} &= \nabla_{\dot{\varphi}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}} \Big|_{\varphi(t)} \left( (Z \circ \varphi)^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Big|_{\varphi(t)} \\ &= \dot{\varphi}^i(t) \cdot \left( \frac{\partial Z^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Z^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \Big|_{\varphi(t)} \end{aligned}$$

cambio el índice del sumatorio de  $j$  a  $q$ ,

$$\begin{aligned} &= \dot{\varphi}^i(t) \frac{\partial Z^q}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(t)} \frac{\partial}{\partial x^q} \Big|_{\varphi(t)} + \left( \dot{\varphi}^i Z^j \Gamma_{ij}^q \frac{\partial}{\partial x^q} \right) \Big|_{\varphi(t)} \\ &= \frac{d(Z \circ \varphi)^q}{dt} \frac{\partial}{\partial x^q} \Big|_{\varphi(t)} + \left( \dot{\varphi}^i Z^j \Gamma_{ij}^q \frac{\partial}{\partial x^q} \right) \Big|_{\varphi(t)} \\ &= \left( \frac{d(Z \circ \varphi)^q}{dt} + \dot{\varphi}^i Z^j \Gamma_{ij}^q \Big|_{\varphi(t)} \right) \frac{\partial}{\partial x^q} \Big|_{\varphi(t)}. \end{aligned}$$

Llegamos a un sistema de  $n$  EDOs sobre el índice  $q$  que determinan  $Z \circ \varphi$ :

$$0 = \frac{d(Z \circ \varphi)^q}{dt} + \dot{\varphi}^i(t) Z^j(\varphi(t)) \Gamma_{ij}^q(\varphi(t)).$$

Obsérvese que el sistema está escrito usando el convenio de Einstein (Sección B.2). Por el teorema de Picard–Lindelöf, tenemos existencia local y unicidad de la solución.

Damos la idea para probar la existencia global. Primero, definimos en  $Z$  en unas coordenadas  $(U, x)$ . Para que no haya problema en las intersecciones, lo que hacemos es trasladar  $Z_0$  a  $\tilde{Z}_0$  en la intersección con las próximas coordenadas  $(V, y)$ . Ahora resolvemos la ecuación localmente en  $(V, y)$  y seguimos extendiendo el campo (véase la Figura 2.2). Como hemos definido  $Z$  independientemente de las coordenadas, hay una única forma de extender el campo y tenemos existencia y unicidad global.  $\square$

**Corolario 2.9 (Expresión local de curvas autoparalelas).** *En coordenadas, la expresión de una curva autoparalela  $\varphi$  es:*

$$(2.1) \quad 0 = \nabla_{\dot{\varphi}}(\dot{\varphi}) \Big|_{\varphi(t)} = \ddot{\varphi}^q(t) + \dot{\varphi}^i(t) \dot{\varphi}^j(t) \Gamma_{ij}^q(\varphi(t)).$$

*Demostración.* Basta escoger  $Z = \dot{\varphi} \circ \varphi^{-1}$  en el Teorema 2.8. Nótese que como  $\dot{\varphi} : \mathbb{R} \rightarrow TM$  no determina un campo, componemos para que  $\dot{\varphi} \circ \varphi^{-1} : M \rightarrow TM$  sí lo haga. También nótese que  $Z$  está definido sólo sobre la curva  $\varphi$ .  $\square$

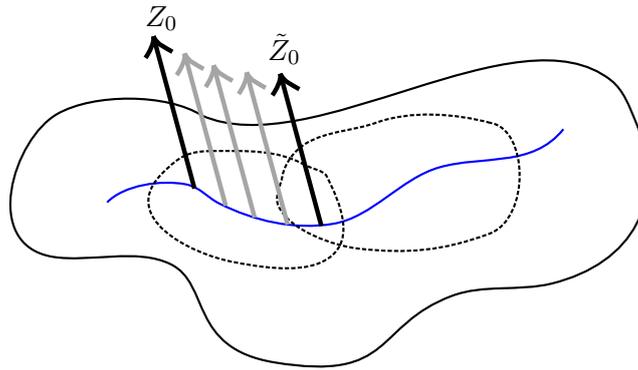
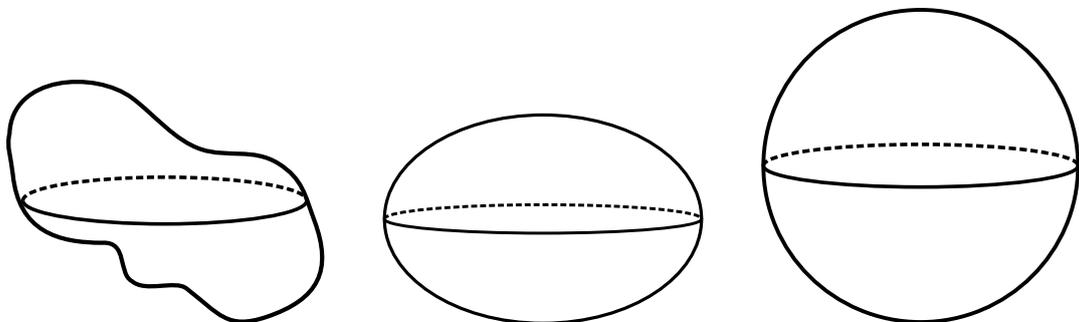


Figura 2.2: Extendemos el campo  $Z$  en coordenadas locales hasta la intersección.

### 2.3. Curvatura

Intuitivamente, la elección de una conexión da la “forma” a la variedad porque fija que líneas son líneas rectas. Por ejemplo, cuando pensamos en la esfera de  $\mathbb{R}^3$  como variedad, dotada de la topología usual y de un atlas adecuado, estamos pensando en  $\mathbb{S}^2$ . Como tal, la esfera no tiene forma (Figura 2.3a), pero cuando damos una conexión se la imponemos. Como no disponemos de herramientas para medir distancias, cuando decimos forma podemos referirnos tanto a un elipsoide (Figura 2.3b), como a la esfera redonda (Figura 2.3c) y necesitaremos de una métrica para discernir entre ambas.



(a) Sin conexión, “sin forma”.

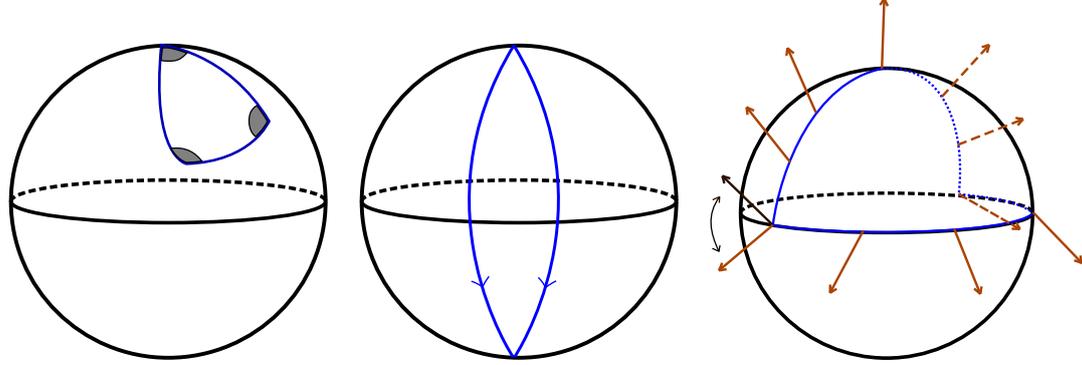
(b) Dada conexión, puede ser un elipsoide.

(c) Dada conexión, puede ser una esfera.

Figura 2.3: Posibles representaciones de la variedad diferencial  $\mathbb{S}^2$  con y sin conexión.

Unos de los grandes descubrimientos de Gauss fue su *Theorema Egregium* ([9, págs. 291-293]) en el que demuestra que la curvatura, la “forma” de una superficie, es una medida intrínseca. Es decir, un habitante de la superficie puede observar los efectos de que la superficie que habita está curvada. Por ejemplo, se puede medir el exceso de ángulo en los triángulos (Figura 2.4a) o la velocidad a la que se alejan las geodésicas (Figura 2.4b). En nuestro caso, nos fijaremos en cómo varía un vector al transportarlo paralelamente (Figura 2.4c) por curvas que se vuelven infinitesimalmente pequeñas. En el límite, esto se convierte en ver cómo fallan en conmutar las derivadas cruzadas<sup>2</sup>. Por

ejemplo, en contraste con la esfera, en el plano, que no tiene curvatura, las derivadas cruzadas conmutan y el transporte paralelo siempre nos devuelve el vector original.



(a) Los ángulos de un triángulo no suman  $180^\circ$ .

(b) Las geodésicas de una esfera (azul) se alejan y luego se acercan.

(c) El transporte paralelo de un vector (marrón oscuro) no devuelve el vector original.

Figura 2.4

Para formular de forma rigurosa esta idea definimos la curvatura de Riemann:

**Definición 2.10 (Curvatura Riemanniana).** Es el campo tensorial  $(1,3)$  dado por:

$$\begin{aligned} R(\omega, X, Y; Z) &= \omega(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\ &= \omega(([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]})(Z)), \end{aligned}$$

**Observación.** Nótese que esta notación con  $;$  no es estándar y la adoptamos de [6].

Hay que tener en cuenta que cuando trabajemos con la base coordenada  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ , el conmutador se desvanece

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0,$$

y la expresión de la curvatura en coordenadas se simplifica a:

$$R^i_{jkl} = R\left(dx^i, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = dx^i \left( \left[ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \right] \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \right).$$

**Proposición 2.11 (Expresión local de R).** Si consideramos una carta  $(U, x)$  en la variedad  $M$ , podemos expresar  $R$  en coordenadas en función de los símbolos de

<sup>2</sup>Para una explicación visual excelente de holonomía y curvatura consultar [6].

*Christoffel:*

$$\begin{aligned}
R_{jkl}^i &= dx^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \frac{\partial}{\partial x^l} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^l} \right) \\
&= dx^i \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left( \Gamma_{lk}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} \left( \Gamma_{lj}^m \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \right) \\
&= dx^i \left( \frac{\partial \Gamma_{lk}^m}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^m} + \Gamma_{lk}^m \Gamma_{mj}^n \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^m}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^m} - \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mk}^n \frac{\partial}{\partial x^n} \right). \\
(2.2) \quad R_{jkl}^i &= \frac{\partial \Gamma_{lk}^i}{\partial x^j} + \Gamma_{lk}^m \Gamma_{mj}^i - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \Gamma_{lj}^m \Gamma_{mk}^i.
\end{aligned}$$

## 2.4. Torsión

Para finalizar el capítulo, definiremos la torsión, un tensor que se deriva de la conexión. Aunque se ha tratado de darle un significado físico preciso sobre cómo afecta al espacio, no existe una respuesta satisfactoria ([10, sec. 5.9]). Para nosotros tendrá espacial relevancia cuando hablemos de métrica y del Teorema Fundamental de la Geometría (pseudo-)Riemanniana.

**Definición 2.12 (Torsión).** Dada una variedad  $M$  con conexión  $\nabla$ , la torsión es el campo tensorial-(1, 2)  $T$ :

$$T_{\nabla}(\omega, X, Y) = \omega(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]).$$

**Definición 2.13 (Libre de torsión).** Sea  $M$  una variedad con conexión  $\nabla$ . Decimos que la conexión  $\nabla$  es libre de torsión si  $T_{\nabla} = 0$ . En otras palabras, para cualesquiera campos vectoriales  $X, Y$  se tiene:

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

## CAPÍTULO 3

# Variedades (pseudo-)Riemannianas

---

En este capítulo dotaremos a nuestra variedad de más estructura. En este caso, necesitamos una forma de medir distancias y ángulos de los vectores en cada espacio tangente. Ello nos permitirá hablar de la velocidad de una curva y, posteriormente, de su longitud. Entonces, podremos buscar cuáles son las curvas que minimizan la distancia entre dos puntos: las llamadas geodésicas. Más adelante, presentaremos dos herramientas muy potentes: “bajar” y “subir” índices y el Teorema Fundamental de la Geometría (pseudo-)Riemanniana; que usaremos para definir nuevas “curvaturas”. Por último, caracterizaremos las aplicaciones que preservan la métrica, las isometrías, y definiremos los campos de Killing y la derivada de Lie que, de alguna forma, codifican las simetrías de la variedad.

En cuanto a referencias, a lo largo del capítulo seguiremos principalmente [5, caps. 10, 11] apoyándonos en [6] y [11] como material auxiliar.

### 3.1. Métrica

**Definición 3.1 (Métrica (pseudo-)Riemanniana).** Una métrica  $g$  en una variedad  $M$  es un campo tensorial- $(0, 2)$  que cumple:

1. *Simétrico.*  $g(X, Y) = g(Y, X)$  para todo campo vectorial  $X$  e  $Y$ .
2. *No degenerado.* La aplicación  $\flat : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M)$  dada por

$$\underbrace{\flat(X)}_{\in T^*M}(Y) = g(X, Y)$$

es un isomorfismo entre  $TM$  y  $T^*M$ . Es decir, para cada covector  $\omega$  podemos encontrar un  $X$  tal que  $\flat(X) = \omega$ .

**Observación.** A la aplicación  $\flat$  se le llama isomorfismo musical.

La identificación de campos vectoriales con campos covectoriales se llama comúnmente “bajar” o “subir” índices. Es fácil de ver el porqué con un ejemplo: si  $X$  es un campo vectorial, sus componentes se escriben  $X^i$  y, si  $\omega$  es un campo covectorial,



**Teorema 3.4.** *La signatura está bien definida y es invariante por cambios de base.*

*Demostración.* Es cierto por La Ley de Inercia de Sylvester ([12]).  $\square$

**Definición 3.5 (Clasificación de métricas por signatura).** Sea  $g$  una métrica con signatura  $(p, q)$  en un espacio de dimensión  $n$ , se dice que es Riemanniana si tiene una signatura  $(n, 0)$ <sup>1</sup>. De lo contrario se dice que la métrica es pseudo-Riemanniana, entre las que distinguimos el caso  $(n - 1, 1)$  que se denomina métrica Lorentziana.

Llamamos variedad (pseudo-)Riemanniana al par  $(M, g)$  con  $M$  variedad y  $g$  métrica (pseudo-)Riemanniana.

**Observación.** Una métrica Riemanniana es lo que llamamos comúnmente producto interior. Es decir, cumple [Definición 3.1](#) y, adicionalmente,

$$\begin{aligned} g(X, X) = 0 &\iff X = 0, \\ g(X, X) > 0 &\iff X \neq 0. \end{aligned}$$

### 3.3. Geodésicas

Para definir geodésicas únicamente necesitaremos formalizar la longitud de una curva lo que nos permitirá pensar en cuáles maximizan o minimizan esa longitud.

**Definición 3.6 (Longitud de una curva).** Dada una variedad Riemanniana  $(M, g)$  y una curva  $\gamma : (0, 1) \rightarrow M$ , se define el funcional longitud de una curva como:

$$L[\gamma] = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt,$$

donde  $s(t) = \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}$  se llama “velocidad de la curva en el instante  $t$ ”.

**Proposición 3.7.** *La longitud de una curva  $\gamma$  no depende de su parametrización. Sea  $\sigma : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  una función suave biyectiva con  $\sigma'(t) > 0$ ,*

$$L[\gamma] = L[\gamma \circ \sigma].$$

*Demostración.* Se sigue de un cálculo directo.  $\square$

Como hemos dicho, informalmente las geodésicas son las curvas extremales que maximizan o minimizan distancias. Para caracterizarlas rigurosamente usamos el funcional longitud:

**Definición 3.8 (Geodésica).** En una variedad Riemanniana  $(M, g)$ , se dice que una curva  $\gamma : (0, 1) \rightarrow M$  es geodésica si es estacionaria con respecto al funcional  $L$ .

**Observación.** Hay varias formas de definir la longitud de una curva y las geodésicas. Por ejemplo, en [4] se definen para tiempos arbitrarios, digamos en  $(t_1, t_2)$ . Luego necesita demostrar varios resultados como la homogeneidad, es decir, que podemos dilatar el tiempo a  $(\frac{t_1}{a}, \frac{t_2}{a})$  o contraerlo y que sigue siendo geodésica. Nosotros evitamos todo esto definiendo longitudes y geodésicas con parámetro unidad, de 0 a 1.

<sup>1</sup>También se puede definir poniendo  $q = n, p = 0$  y lo mismo ocurre para el resto de convenciones: podemos cambiar el papel de  $p$  y  $q$ .

### 3.4. Compatibilidad de la métrica y la conexión

**Definición 3.9 (Compatibilidad entre métrica y conexión).** Se dice que una métrica  $g$  es compatible con una conexión afín  $\nabla$  si, para todo  $X$  campo vectorial,

$$\nabla_X g = 0.$$

Es decir, en el transporte paralelo de dos vectores se preserva la métrica.

**Lema 3.10 (Condición equivalente compatibilidad).** Sea  $g$  una métrica. Tenemos que para todo  $X$ ,  $\nabla_X g = 0$  si y sólo si para todo  $X, Y, Z$  se cumple  $X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ .

*Demostración.* Sean  $Y, Z$  campos vectoriales, usando que  $g(Y, Z)$  es una función  $C^\infty(M)$ :

$$X(g(Y, Z)) = \nabla_X(g(Y, Z)) = (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

Donde hemos usado [Definición 2.1\(1 y 3\)](#). De la igualdad anterior, las dos implicaciones se deducen automáticamente.  $\square$

**Definición 3.11 (Conexión de Levi-Civita).** Una conexión se dice de Levi-Civita si es compatible con la métrica  $g$  y tiene torsión 0.

**Teorema 3.12 (Teorema Fundamental de la Geometría (pseudo-)Riemanniana).** Toda variedad (pseudo-)Riemanniana tiene una única conexión de Levi-Civita. De hecho, ésta viene determinada por la “Fórmula de Koszul” (donde  $X, Y, Z$  son campos vectoriales):

$$(3.3) \quad g(\nabla_X Y, Z) = \frac{1}{2} \left\{ X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \right. \\ \left. - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X]) \right\}.$$

*Demostración.* Usando el [Lema 3.10](#) varias veces y que  $g$  es un tensor simétrico ( $g(X, Y) = g(Y, X)$ ),

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \\ Y(g(X, Z)) &= g(\nabla_Y X, Z) + g(X, \nabla_Y Z), \\ -Z(g(X, Y)) &= -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y), \end{aligned}$$

y, sumando las tres ecuaciones anteriores,

$$\begin{aligned} X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) &= \\ &= g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) + g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + g(Z, \nabla_Y X + \nabla_X Y) \\ &= g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) + g(Z, [Y, X]) + 2g(Z, \nabla_X Y) \end{aligned}$$

recuperamos la [Ecuación 3.3](#). Nos falta comprobar dos cosas: que  $\nabla$  es una conexión y que está definida para campos tensores arbitrarios (hasta ahora sólo hemos considerado campos vectoriales).

En coordenadas, sean  $X = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Z = \frac{\partial}{\partial x^q}$ ,

$$g(\nabla_X Y, Z) = g\left(\Gamma_{ij}^r \frac{\partial}{\partial x^r}, \frac{\partial}{\partial x^q}\right) = \Gamma_{ij}^r g_{rq}.$$

En la “Fórmula de Koszul” (usando que  $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ ),

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \frac{1}{2}\{X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, X])\} \\ &= -\frac{1}{2}\left(X\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^q}\right)\right) + Y\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^q}\right)\right) - Z\left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{iq}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^q}\right). \end{aligned}$$

En función de los símbolos de Christoffel, nos queda el siguiente resultado:

$$\Gamma_{ij}^r = g^{rq} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{iq}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i} \right).$$

Por lo que vimos en [Teorema 2.4](#), dados los Coeficientes de Christoffel (que sólo dependen de  $g$ ),  $\nabla$  está completamente determinado para tensores arbitrarios.

La unicidad se deduce de que toda  $\nabla$  ha de cumplir la [Ecuación 3.3](#) necesariamente.  $\square$

**Corolario 3.13.** *Podemos calcular los símbolos de Christoffel en función de la métrica utilizando la siguiente igualdad:*

$$(3.4) \quad \Gamma_{ij}^r = g^{rq} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^q} - \frac{\partial g_{iq}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jq}}{\partial x^i} \right).$$

**Teorema 3.14 (Significado geométrico de la compatibilidad).** *Sea  $g$  una métrica y  $\nabla$  una conexión. Son compatibles sí y sólo sí las curvas autoparalelas ([Definición 2.6](#)) son precisamente las geodésicas.*

*Demostración.* Una geodésica  $\gamma$  hace estacionario el funcional de longitud  $L$ , luego, en coordenadas, tiene que cumplir las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$(3.5) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^m} = 0.$$

Para simplificar los cálculos reparametrizamos  $\gamma$  para que  $g(\gamma(t), \gamma(t)) = 1$ , y, por la [Proposición 3.7](#), no afecta al funcional. Calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^m} &= g_{mj}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}^m} \right) &= \dot{\gamma}^s(t) \dot{\gamma}^j(t) \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^s}(\gamma(t)) + g_{mj}(\gamma(t)) \ddot{\gamma}^j(t), \\ \frac{\partial L}{\partial \gamma^m} &= \frac{1}{2} \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Por la [Ecuación 3.5](#):

$$g_{mj}\ddot{\gamma}^j + \dot{\gamma}^s\dot{\gamma}^j\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^s} - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} = 0.$$

Multiplico por  $g^{qm}$  y renombro índices,

$$(3.6) \quad \ddot{\gamma}^q + g^{qm}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) = 0,$$

intercambiamos  $i$  y  $j$ ,

$$(3.7) \quad \ddot{\gamma}^q + g^{qm}\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^i\left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^m}\right) = 0.$$

Si utilizamos que  $g_{ij} = g_{ji}$  y sumamos [Ecuación 3.6](#) con [Ecuación 3.7](#):

$$0 = \ddot{\gamma}^q + g^{qm}\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) = \ddot{\gamma}^q + \dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j\Gamma_{ij}^q,$$

que es precisamente la condición para que  $\gamma$  sea una línea recta ([Ecuación 2.1](#)). De este modo, ambas nociones son equivalentes si la conexión es compatible con la métrica.  $\square$

**Corolario 3.15.** *Sea  $\gamma$  una geodésica. Su velocidad,  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ , es constante.*

*Demostración.* Se sigue de un cálculo directo usando la [Definición 3.9](#) y la [Definición 2.6](#):

$$\begin{aligned} \nabla_{\gamma(t)}(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})) &= (\nabla_{\gamma(t)}g)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + g(\nabla_{\gamma(t)}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + g(\dot{\gamma}, \nabla_{\gamma(t)}\dot{\gamma}) \\ &= 0 + g(0, \dot{\gamma}) + g(\dot{\gamma}, 0) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

### 3.5. Más curvaturas

Podemos definir nuevas “curvaturas” en función de  $g$  obteniendo la conexión  $\nabla$  de Levi-Civita y bajando y subiendo índices de distintas maneras. A lo largo de esta sección vamos a utilizar la Notación Abstracta de índices de Penrose ([Sección B.2](#)). En particular, ninguna de las definiciones se hace en coordenadas sino que los índices sólo ilustran la valencia del tensor.

- **Tensor de curvatura de Riemann:**  $R_{abcd} = g_{am} R_{bcd}^m$ .
- **Tensor de Ricci:**  $R_{ab} = R_{amb}^m$ . Nótese que, aunque  $g$  no aparece en la fórmula explícitamente, la usamos para determinar la conexión de Levi-Civita asociada y, por tanto, para definir  $R$ .
- **Curvatura escalar:**  $R = g^{ab} R_{ab}$
- **Curvatura de Einstein:**  $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab} R$ .

### 3.6. Isometrías

Como es habitual en geometría, nos gustaría poder comparar variedades y, en este caso, en función de sus respectivas métricas. Esto es especialmente importante porque si una aplicación preservase la métrica, significaría que preserva toda la estructura adicional que depende de ésta, como las geodésicas, la conexión o la curvatura.

**Definición 3.16 (Isometría).** Sean  $(M, g)$  y  $(N, h)$  variedades (pseudo-)Riemannianas. Una isometría es un difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  tal que:

$$(3.8) \quad g_p(u, v) = h_{f(p)}(df_p(u), df_p(v)),$$

para todo  $p \in M$ ,  $u, v \in T_p M$ . Recuérdese que la notación  $g_p$  denota que  $g$  se evalúa en el punto  $p$ .

**Corolario 3.17 (Isometría preserva geodésicas).** Dadas dos variedades (pseudo-)Riemannianas  $(M, g)$  y  $(N, \bar{g})$  y una isometría  $f : M \rightarrow N$ . Para toda geodésica  $\alpha(t)$  en  $M$  se tiene que  $f \circ \alpha$  es geodésica de  $N$  y viceversa.

*Demostración.* La función  $f$  es un difeomorfismo que nos da una correspondencia entre curvas de  $M$  y de  $N$ . Como  $f$  preserva la longitud de las curvas, también impone una correspondencia entre las geodésicas.

Para comprobarlo tomamos  $L$  y  $\bar{L}$  los funcionales de longitud de  $g$  y  $\bar{g}$  respectivamente y  $\alpha$  una curva en  $M$ .

$$\begin{aligned} \bar{L}[f \circ \alpha] &= \int_0^1 \sqrt{\bar{g}((f \circ \alpha)'(t), (f \circ \alpha)'(t))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{\bar{g}(df(\alpha'(t)), df(\alpha'(t)))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt \\ &= L[\alpha]. \end{aligned}$$

Para ver el otro sentido, basta con tomar  $f^{-1}$  y repetir el cálculo observando que  $f^{-1}$  es también una isometría.  $\square$

### 3.7. Más conceptos geométricos

Nos será útil para más adelante definir qué significa que un tensor tenga simetrías en una variedad. Intuitivamente, se traduce en que no cambie al movernos en una dirección o, en otras palabras, que la “derivada” direccional se anule. En lenguaje matemático, si queremos dar una dirección en cada punto damos un campo vectorial y, si queremos derivar en la dirección del campo usamos la derivada de Lie.

**Definición 3.18 (Derivada de Lie).** Dada una variedad  $M$ , la derivada de Lie es la función:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^{p,q}M) &\rightarrow \Gamma(T^{p,q}M) \\ (X, Y) &\mapsto \mathcal{L}_X(Y)\end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty(M)$ ,  $\mathcal{L}_X(f) = X(f)$ .
2. (Regla de Liebniz) Si  $\omega_1, \dots, \omega_p \in \Gamma(T^*M)$ ,  $Y_1, \dots, Y_q \in \Gamma(TM)$ ,
 
$$(3.9) \quad \begin{aligned}\mathcal{L}_X(T(\omega_1 \cdots \omega_p, Y_1 \cdots Y_q)) &= (\mathcal{L}_X T)(\omega_1, \dots, \omega_p, Y_1 \cdots Y_q) \\ &\quad + T(\mathcal{L}_X \omega_1, \dots, \omega_p, Y_1, \dots, Y_q) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + T(\omega_1, \dots, \omega_p, Y_1, \dots, \mathcal{L}_X Y_q).\end{aligned}$$
3. Si  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $\mathcal{L}_Y X = [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$ .
4. (Lineal 1) Si  $Z \in \Gamma(T^{p,q}M)$ ,  $\mathcal{L}_{X+Y}(Z) = \mathcal{L}_X Z + \mathcal{L}_Y Z$ .
5. (Lineal 2) Si  $Z, W \in \Gamma(T^{p,q}M)$ ,  $\mathcal{L}_X(Z + W) = \mathcal{L}_X Z + \mathcal{L}_X W$ .

Intuitivamente, un campo de Killing representa una simetría porque preserva la métrica cuando nos movemos en la dirección del flujo de  $K$ :

**Definición 3.19 (Campo de Killing).** Un campo vectorial  $K$  se dice de Killing si:

$$(3.10) \quad \mathcal{L}_K g = 0.$$

**Proposición 3.20.** Sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de la métrica  $g$ . Todo campo de Killing  $K$  cumple:

$$g(\nabla_X(K), Y) + g(X, \nabla_Y(K)) = 0.$$

*Demostración.* Lo primero es ver que si la conexión es de Levi-Civita,

$$\begin{aligned}K(g(X, Y)) &= \nabla_K(g(X, Y)) \\ &= (\nabla_K g)(X, Y) + g(\nabla_K(X), Y) + g(X, \nabla_K(Y)) \\ &= 0 + g(\nabla_K(X), Y) + g(X, \nabla_K(Y)),\end{aligned}$$

lo que se deduce de la regla de Liebniz para  $\nabla$  ([Elemento 2](#)) y de la compatibilidad de la métrica ([Definición 3.9](#)). Si usamos la regla de Liebniz esta vez para la derivada de Lie ([Ecuación 3.9](#)), y la [Definición 3.19](#):

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_K g)(X, Y) &= \mathcal{L}_K(g(X, Y)) - g(\mathcal{L}_K X, Y) - g(X, \mathcal{L}_K Y) \\ &= K(g(X, Y)) - g([K, X], Y) - g(X, [K, Y]) \\ &= g(\nabla_K(X), Y) + g(X, \nabla_K(Y)) - g([K, X], Y) - g(X, [K, Y]) \\ &= g(\nabla_K(X) - [K, X], Y) + g(X, \nabla_K(Y) - [K, Y]) \\ &= g(\nabla_X(K), Y) + g(X, \nabla_Y(K)).\end{aligned}$$

Obsérvese que en el último paso hemos usado que la conexión de Levi-Civita es libre de torsión ([Definición 2.13](#)).  $\square$

## CAPÍTULO 4

# Espacio-tiempo

---

En este capítulo nos adentraremos en la relatividad general adoptando un enfoque geométrico. Esto significa que obviaremos las justificaciones físicas e intentaremos ceñirnos a la geometría Riemanniana mientras que sea posible. En particular, no proporcionaremos una justificación de las ecuaciones de Einstein porque mayoritariamente se han comprobado experimentalmente ([13]). Por tanto, para nosotros el espacio-tiempo es exclusivamente una variedad Lorentziana de cuatro dimensiones que obedece unas ecuaciones dadas.

Actualmente, en física se fijan el espacio y la topología del universo:  $\mathbb{R}^4$  equipado con la topología métrica usual. El resto de estructura se determina con las ecuaciones de campo de Einstein que relacionan la curvatura del espacio-tiempo y la distribución de la masa. La forma más sencilla de expresarlas es:

**Definición 4.1 (Ecuaciones de campo de Einstein).** Sea  $M$  una variedad equipada con un tensor- $(0, 2)$   $T$  llamado tensor de energía impulso. Se dice que una métrica pseudo-Riemanniana  $g$  satisface las ecuaciones del campo de Einstein si:

$$(4.1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = T_{\mu\nu},$$

**Observación.** El tensor  $T$  se determina de manera casi enteramente experimental con lo que, para nosotros, nuevamente, será dado.

**Observación.** Nótese que el lado izquierdo de la [Ecuación 4.1](#) es enteramente geométrico mientras que el derecho es físico. Por ello, a menudo se usa la curvatura de Einstein ([Sección 3.5](#)) para simplificar las ecuaciones a una igualdad entre un tensor puramente geométrico y otro físico:

$$(4.2) \quad T_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}.$$

**Observación.** En 1917 Einstein introdujo la llamada constante cosmológica  $\Lambda$  en sus ecuaciones para modelar un universo dinámico, que se expande o se contrae.

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu},$$

con  $\kappa$  otra constante. Tras mucha controversia sobre el valor de  $\Lambda$ , las observaciones empíricas parecen indicar que es estrictamente mayor que 0 y muy pequeña. Sin

embargo, las cosas no son tan claras porque si partimos de la mecánica cuántica, prediciremos una constante mucho más grande,  $10^{120}$  veces mayor.

Esta gigantesca discrepancia es un problema abierto en física, así como determinar sus implicaciones. Por nuestra parte, nos centraremos en la situación  $\Lambda = 0$ .

Nuestra labor se reduce a buscar métricas  $g$  que satisfagan [Ecuación 4.2](#). Antes de acometer semejante gesta, fijaremos notación que a menudo se emplea en física y que es menos común en geometría:

- $T \propto R$  significa que  $T$  es proporcional a  $R$ , es decir, que existe un escalar  $\lambda$  tal que  $T = \lambda R$ .
- $\delta_j^i$  se conoce cómo la delta de Kronecker y como función de  $i, j$  vale:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

- En toda la sección usaremos los convenios de Einstein y Penrose ([Sección B.2](#)) asiduamente.

Por último, destacar que el desarrollo de este capítulo está basado principalmente en [\[14, caps. 23\]](#), [\[3, caps. 2, 5\]](#) y [\[15\]](#).

## 4.1. Métrica de Schwarzschild

Resolver las ecuaciones de Einstein en general es extremadamente complicado. Lo que podemos hacer es imponer condiciones extra sobre el espacio que nos permitan simplificarlas. Partimos de las siguientes suposiciones:

1. El espacio-tiempo es estacionario. Es decir, es simétrico por traslaciones de tiempo. Matemáticamente, significa que existe un campo de Killing  $K$  que satisface  $g(K, K) > 0$ . Tales campos se conocen como “temporales”. En particular, obsérvese que  $K$  nunca se anula.
2. El espacio-tiempo es estático. Matemáticamente se traduce en que existe una foliación de hipersuperficies ortogonales al campo de Killing anterior. Esto nos permite dar coordenadas en dos pasos: para elegir la superficie, y dentro de ésta ([Figura 4.1](#)).

En concreto, existen coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$  tal que las hipersuperficies son los conjuntos de nivel  $t = \text{cte}$ . En estas coordenadas,  $K$  es perpendicular si:

$$K = f \frac{\partial}{\partial x^t}, \text{ con } f \text{ función escalar no nula.}$$

3. El espacio es esféricamente simétrico en las coordenadas espaciales. Es decir, existen campos de Killing que corresponden a las simetrías de la esfera. Veremos qué significa esto con precisión más adelante en la [Subsección 4.1.2](#).

Bajo estas suposiciones, modelamos un universo donde tenemos una masa puntual en el origen, un agujero negro, que no gira. También se puede usar con bastante exactitud para determinar movimientos en el sistema solar, tomando el Sol como una “masa puntual” y suponiendo que la masa de los planetas no deforma mucho el espacio.

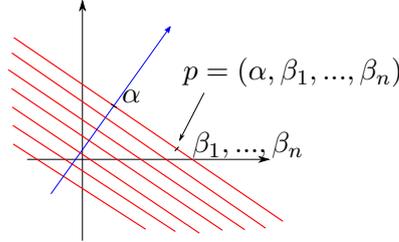


Figura 4.1: Primero damos coordenadas para elegir la hipersuperficie roja donde se encuentre el punto. Dentro de está damos coordenadas en la subvariedad.

#### 4.1.1. Espacio-tiempo estático y estacionario

El objetivo de esta sección es buscar un sistema de coordenadas bajo estas condiciones para simplificar los cálculos. A menudo se las denomina “coordenadas de Schwarzschild”.

Lo primero que hacemos es aprovechar que hemos foliado el espacio y, a partir de ahora, trabajaremos en las coordenadas  $(t, x_1, x_2, x_3)$  en las que conocemos una expresión para el campo  $K$ . Usaremos también la notación que es habitual en la literatura en la que los índices latinos se refieren a las coordenadas espaciales ( $x_1, x_2$  y  $x_3$ ),  $t$  se reserva para la temporal y las letras griegas se usan para cualquiera.

Para empezar a simplificar  $g$ , observamos que  $K$  es perpendicular a las superficies de nivel y que es temporal:

$$(4.3) \quad 0 = g\left(K, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = f \cdot g\left(\frac{\partial}{\partial x^t}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = f g_{ti} \implies \boxed{g_{ti} = 0},$$

$$(4.4) \quad 0 < g(K, K) = f^2 g_{tt} \implies \boxed{g_{tt} \neq 0}.$$

A continuación, escribimos explícitamente la condición de que  $K$  es un campo de Killing usando la [Ecuación 3.9](#):

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_K \left( g\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) \right) &= (\mathcal{L}_K g) \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + g \left( \mathcal{L}_K \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mathcal{L}_K \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \\ &= 0 + g \left( \left[ K, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right], \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \left[ K, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right] \right) \\ &= g \left( -\frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^t}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, -\frac{\partial f}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x^t} \right) \\ &= -g_{t\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - g_{\mu t} \frac{\partial f}{\partial x^\nu}. \end{aligned}$$

$$(4.6) \quad \mathcal{L}_K \left( g \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \right) = \mathcal{L}_K(g_{\mu\nu}) = K(g_{\mu\nu}) = K^\sigma \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = f \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^t}.$$

De este modo tenemos:

$$(4.7) \quad f \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^t} + g_{t\nu} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + g_{\mu t} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} = 0.$$

Esta última ecuación nos da muchísima información de la forma de  $g$ . Para verlo, separamos por casos dependiendo de los índices:

- Caso  $\mu = i, \nu = j$ . Usando la [Ecuación 4.3](#) y que  $g$  es simétrica:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} 0 &= f \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^t} + g_{tj} \frac{\partial f}{\partial x^i} + g_{it} \frac{\partial f}{\partial x^j} \\ &= f \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^t} + 0 + 0 \\ &\implies \boxed{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^t} = 0} \quad (g_{ij} \text{ no depende de } t). \end{aligned}$$

- Caso  $\mu = t, \nu = i$ . Usando la [Ecuación 4.3](#) y la [Ecuación 4.4](#):

$$(4.9) \quad \begin{aligned} 0 &= f \frac{\partial g_{ti}}{\partial x^t} + g_{ti} \frac{\partial f}{\partial x^t} + g_{tt} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &= 0 + 0 + g_{tt} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\ &\implies \boxed{\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0} \quad (f \text{ no depende de las coordenadas espaciales}). \end{aligned}$$

- Caso  $\mu = t, \nu = t$ .

$$\begin{aligned} 0 &= f \frac{\partial g_{tt}}{\partial x^t} + g_{tt} \frac{\partial f}{\partial x^t} + g_{tt} \frac{\partial f}{\partial x^t} \\ &= f \dot{g}_{tt} + g_{tt} \dot{f} + g_{tt} \dot{f}, \end{aligned}$$

y, resolviendo la EDO para  $g_{tt}$  por separación de variables llegamos a:

$$(4.10) \quad \boxed{g_{tt} = \frac{c(x)}{f^2}},$$

para cierta función  $c(x) = c(x_1, x_2, x_3)$  diferenciable.

**Teorema 4.2.** *Si tenemos un espacio-tiempo estático y estacionario, podemos elegir coordenadas tal que  $g$  se pueda expresar como tensor- $(0, 2)$  simétrico de la siguiente manera:*

$$g = g_{tt}(x)dt^2 + g_{ij}(x)dx^i dx^j,$$

con el campo de Killing  $K = (1, 0, 0, 0)$ .

*Demostración.* Usamos [Ecuación 4.3](#), [Ecuación 4.8](#), [Ecuación 4.9](#) y [Ecuación 4.10](#):

$$g = \frac{c(x)}{f^2(t)} dt^2 + g_{ij}(x) dx^i dx^j,$$

$$K = (f(t), 0, 0, 0).$$

Hacemos un cambio de coordenadas en  $t$ :  $f(t)dt' = dt$  y llamamos  $c(x) = g_{tt}(x)$ .  $\square$

### 4.1.2. Simetría esférica

Las isometrías de la 2-esfera coinciden exactamente con las rotaciones vectoriales de  $\mathbb{R}^3$  ([8, pág. 200]) y constituyen un grupo de Lie de dimensión 3 denotado por  $SO(3)$ . Este grupo está generado por el conjunto de rotaciones con respecto a cualquiera de los tres ejes de la referencia estándar de  $\mathbb{R}^3$ . Estas rotaciones son el flujo de los campos vectoriales siguientes:

$$R = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad S = z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, \quad T = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}.$$

Para aprovechar más simetrías, vamos a usar coordenadas esféricas con el siguiente convenio:

$$x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta,$$

y la inversa dada por:

$$\theta = \arccos z, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Expresaremos  $R$ ,  $S$  y  $T$  en estas coordenadas pero, como todos los cálculos son similares, lo hacemos únicamente para  $R$  como ejemplo:

$$\begin{aligned} R &= x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \\ &= \sin \theta \cos \phi \left( \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - \sin \theta \sin \phi \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \sin \theta \cos \phi \left( 0 + \frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) - \sin \theta \sin \phi \left( 0 + \frac{-y}{x^2 + y^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \\ &= \sin \theta \cos \phi \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \sin \theta \sin \phi \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Por convención, para la métrica de Schwarzschild los campos se normalizan, dividiendo por las constantes adecuadas, a:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} R &= \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ S &= \sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ T &= \cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Se puede comprobar que  $[R, S] = T$ ,  $[S, T] = R$  y  $[T, R] = S$  luego el álgebra que generan es precisamente  $so(3)$ , el álgebra de Lie del grupo de rotaciones  $SO(3)$ .

Una vez que tenemos expresados los campos en las coordenadas adecuadas podemos usar el mismo truco que usamos en [Ecuación 4.5](#) y [Ecuación 4.6](#), escribiendo explícitamente la condición de que sean vectores de Killing:

$$(4.12) \quad K(g_{\mu\nu}) = g \left( \mathcal{L}_K \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \mathcal{L}_K \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right).$$

Esta vez, no podemos separar claramente por índices, sino que tenemos que seguir una secuencia de pasos aplicando repetidamente [Ecuación 4.12](#) a los campos de la [Ecuación 4.11](#):

1. Con el campo  $R$  llegamos a

$$(4.13) \quad \boxed{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \phi} = 0}.$$

2. Fijamos  $\mu = \theta, \nu = \theta$ . Si escribimos la condición para el campo  $S$  obtenemos

$$(4.14) \quad \sin \phi \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \phi}{\sin^2 \theta} g_{\theta\phi} = 0,$$

y, equivalentemente para el campo  $T$

$$\cos \phi \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2 \sin \phi}{\sin^2 \theta} g_{\theta\phi} = 0.$$

Si despejo  $\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta}$  y sustituyo,

$$(4.15) \quad g_{\theta\phi} \frac{2}{\sin^2 \theta \sin^2 \phi} = 0 \implies \boxed{g_{\theta\phi} = 0}.$$

Sustituyendo en [Ecuación 4.14](#) tenemos además que,

$$(4.16) \quad \boxed{\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0}.$$

3. Fijamos  $\mu = \theta, \nu = \phi$  y operamos con el campo  $S$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \phi \frac{\partial g_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \cos \phi g_{\theta\theta} - \frac{1 \cos \phi}{\sin^2 \theta} g_{\phi\phi} - \sin \phi \cot \theta g_{\theta\phi} \\ &= 0 \quad + \cos \phi g_{\theta\theta} - \frac{1 \cos \phi}{\sin^2 \theta} g_{\phi\phi} - 0. \end{aligned}$$

Sacando factor común llegamos a,

$$(4.17) \quad \boxed{g_{\phi\phi} = \sin^2 \theta g_{\theta\theta}}.$$

4. Tomamos  $\mu = r, \nu = r$  y el campo  $S$  y obtenemos:

$$(4.18) \quad \boxed{\frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} = 0}.$$

5. Si fijamos  $\mu = r, \nu = \theta$  y tomamos nuevamente  $S$  y  $R$  respectivamente:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \phi \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\cos \phi}{\sin^2 \theta} g_{r\phi} & (S), \\ 0 &= \cos \phi \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{\sin^2 \theta} g_{r\phi} & (R). \end{aligned}$$

Repetimos los mismos pasos que para [Ecuación 4.15](#),

$$(4.19) \quad \boxed{g_{r\phi} = 0}.$$

6. Fijamos  $\mu = r, \nu = \phi$  y el campo  $S$ . Si usamos [Ecuación 4.19](#) dos veces,

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \phi \frac{\partial g_{r\phi}}{\partial \theta} + \cos \phi g_{r\theta} - \sin \phi \cot \theta g_{r\phi} \\ &= 0 \quad + \cos \phi g_{r\theta} - 0, \end{aligned}$$

y concluimos con

$$(4.20) \quad \boxed{g_{r\theta} = 0}.$$

7. Por último, tomamos  $\mu = r, \nu = r$  nuevamente con  $S$  y obtenemos:

$$(4.21) \quad \boxed{\frac{\partial g_{rr}}{\partial \theta} = 0}.$$

**Teorema 4.3.** *Si tenemos un espacio-tiempo estático y estacionario, con un espacio esféricamente simétrico, podemos elegir coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  para que  $g$ , una métrica pseudo-Riemanniana, tenga la siguiente forma (como tensor-(0, 2) simétrico):*

$$g = g_{tt}(r)dt^2 + g_{rr}(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

donde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$  la métrica usual de la 2-esfera.

*Demostración.* Se sigue de [Ecuación 4.13](#), [Ecuación 4.15](#), [Ecuación 4.16](#), [Ecuación 4.18](#), [Ecuación 4.17](#), [Ecuación 4.19](#), [Ecuación 4.20](#) y [Ecuación 4.21](#). Por último, renombramos de manera sugerente  $g_{\theta\theta}(r) = r^2$  y reparametrizamos.  $\square$

### 4.1.3. Solución de las ecuaciones de Einstein

En esta sección resolveremos completamente las ecuaciones de Einstein. A nuestras hipótesis añadimos que el tensor de energía impulso  $T$  sea 0, lo que se conoce como soluciones en el vacío.

Podemos simplificar las ecuaciones de campo de Einstein usando el siguiente resultado:

**Lema 4.4.** *Una métrica  $g$  cumple las ecuaciones de Einstein en el vacío ( $T_{\mu\nu} = 0 = G_{\mu\nu}$ ) si y sólo si  $R_{\mu\nu} = 0$ .*

*Demostración.* Puesto que  $G_{\mu\nu}$  se construye a partir de  $R_{\mu\nu}$ , es obvio que la anulación del tensor de Ricci implica que el tensor de Einstein se anula. Para la otra dirección observamos que, contrayendo con la métrica tenemos:

$$g^{\mu\nu}G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R - \frac{1}{2}4R = -R.$$

Sustituyendo en la expresión de la curvatura de Einstein (Sección 3.5):

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}G_{\mu\nu}.$$

Usando que  $G_{\mu\nu} = 0$ , obtenemos que  $R_{\mu\nu} = 0$ . □

Es decir, las soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío son exactamente las Ricci planas (curvatura de Ricci 0). Ahora bien, esto no quiere decir que la propia métrica sea plana (curvatura Riemanniana 0) ya el tensor de curvatura no tiene por qué anularse.

Para usar este resultado necesitamos expresar la curvatura de Ricci en función de nuestra métrica  $g$ . Lo primero es calcular los símbolos de Christoffel. Para ello recordamos que, en las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ , (Teorema 4.3)  $g$  es diagonal y vale<sup>1</sup>:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/A(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/B(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones que determinaremos más adelante. El cálculo en sí no tiene mucho interés teórico así que, nuevamente, calcularemos uno como ejemplo, ya que los demás se obtienen de forma similar:

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^r &= \frac{1}{2}g^{r\alpha} \left( \frac{\partial g_{\alpha t}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\alpha t}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial \alpha} \right) && \text{(por Ecuación 3.4)} \\ &= \frac{1}{2}g^{rr} \left( \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) && \text{(} g \text{ es diagonal)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{B(r)} \frac{\partial A(r)}{\partial r} && \text{(ídem).} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Depende del convenio de signos que hayamos elegido, en nuestro caso tenemos que añadir  $-$  a  $g_{\mu\nu}$ . Veremos al final que, de hecho  $A < 0$  y  $B > 0$  dándonos  $(+ - - -)$ .

Símbolos de Christoffel: (los que no aparecen son 0)

$\Gamma_{tr}^t = \Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2} \frac{1}{A(r)} \frac{\partial A(r)}{\partial r}$	$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \frac{1}{B(r)} \frac{\partial A(r)}{\partial r}$	$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{1}{B(r)} \frac{\partial B(r)}{\partial r}$
$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{r}{B(r)}$	$\Gamma_{\phi\phi}^r = -\frac{r \sin^2 \phi}{B(r)}$	$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta$
$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{r\phi}^\phi = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \Gamma_{\phi\theta}^\phi = \cot \theta$

Tensor de Ricci. Usando Ecuación 2.2 podemos calcular cada componente. Como siempre, mostramos el cálculo de uno de ellos como ejemplo:

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= R_{t\mu t}^\mu \\
 &= \frac{\partial \Gamma_{t\mu}^\mu}{\partial t} + \Gamma_{t\mu}^m \Gamma_{mt}^\mu - \frac{\partial \Gamma_{tt}^\mu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{tt}^m \Gamma_{m\mu}^\mu \\
 &= 0 + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rt}^t + \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r - \frac{\partial \Gamma_{tt}^r}{\partial r} - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{r\theta}^\theta - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rt}^t - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{r\phi}^\phi \\
 &= \Gamma_{tr}^t \Gamma_{tt}^r - \frac{\partial \Gamma_{tt}^r}{\partial r} - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{r\theta}^\theta - \Gamma_{tt}^r \Gamma_{r\phi}^\phi \\
 &= \frac{1}{2B} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - \frac{1}{4B^2} \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{Br} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{1}{4AB} \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Igualando a 0 los componentes  $R_{tt}$ ,  $R_{rr}$ ,  $R_{\theta\theta}$  y simplificando tenemos el siguiente sistema de ecuaciones<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
 0 &= R_{tt} = 2rAB \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} - rA \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial r} + 4AB \frac{\partial A}{\partial r} - rB \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2, \\
 0 &= R_{rr} = -2rAB \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + rB \left( \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 + rA \frac{\partial A}{\partial r} \frac{\partial B}{\partial r} + 4A^2 \frac{\partial B}{\partial r}, \\
 0 &= R_{\theta\theta} = -2AB + 2AB^2 - r \frac{\partial A}{\partial r} B + rA \frac{\partial B}{\partial r}.
 \end{aligned}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones llegamos a:

$$0 = R_{tt} + R_{rr} = B \frac{\partial A}{\partial r} + A \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{\partial AB}{\partial r},$$

es decir,

$$AB = c, \quad (c \text{ constante}) \implies \boxed{B = \frac{c}{A}}.$$

Si continuamos y sustituimos  $B$  en función de  $A$  en  $R_{\theta\theta}$  llegamos a la siguiente EDO que sabemos resolver:

$$r \frac{\partial A}{\partial r} = c(1 - A) \implies \boxed{A(r) = c \left( 1 - \frac{k}{r} \right)} \quad (\text{donde } c \text{ y } k \text{ son constantes}).$$

<sup>2</sup>Se pueden obtener muchas más ecuaciones, pero con estas tres es suficiente para determinar completamente la métrica.

Por último, usamos la última condición que impusimos sobre el espacio-tiempo:  $K$  es un campo de Killing temporal. Además, en nuestras coordenadas, vimos que  $K = (1, 0, 0, 0)$  luego que sea temporal es equivalente a que:

$$0 < g(K, K) = g_{tt} = c \left( 1 - \frac{k}{r} \right), \quad \forall r.$$

En particular, como para  $r$  grande  $1 - \frac{k}{r} < 0$ , tenemos que  $\boxed{c < 0}$ . Sólo nos queda absorber  $c$  y escribir  $k = 2m$  con  $m$  una constante para obtener la métrica de Schwarzschild:

**Teorema 4.5.** *Bajo las condiciones de Teorema 4.3, en el vacío  $T_{\nu\mu} = 0$  existen coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  tal que la métrica tiene la siguiente forma como tensor simétrico:*

$$(4.22) \quad g = \left( 1 - \frac{2m}{r} \right) dt^2 - \frac{1}{1 - 2m/r} dr^2 - r^2 d\Omega^2.$$

A esta solución de las ecuaciones de campo de Einstein le damos el nombre de **métrica de Schwarzschild**.

**Observación.** Se puede interpretar  $m$  como la masa puntual del objeto que genera la solución de Schwarzschild. La prueba de la igualdad  $k = 2m$  se reduce a argumentos físicos tales como ver que, en el límite, alejándonos del origen, la gravedad cumple las leyes habituales de un espacio plano.

## 4.2. Geodésicas de Schwarzschild

Las geodésicas de Schwarzschild han sido de gran importancia histórica ya que permiten describir sucesos imposibles en un marco Newtoniano. En este trabajo, nos limitaremos a dar una breve introducción.

Imponiendo una métrica sobre el espacio, la conexión queda determinada por Levi-Civita (Teorema 3.12). Con Ecuación 3.4 y Ecuación 2.1 podemos hallar el sistema de ecuaciones que determina las geodésicas. Junto con la condición de normalización de la “velocidad” forman el sistema que tenemos que resolver:

$$(4.23) \quad \begin{cases} \ddot{t} = \frac{2m}{2mr - r^2} \dot{r} \dot{t}, \\ \ddot{r} = -\frac{m(r - 2m)}{r^3} \dot{t}^2 - \frac{m}{2mr - r^2} \dot{r}^2 - (2m - r) \dot{\theta}^2 + (2m - r) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2, \\ \ddot{\theta} = -\frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{r} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2, \\ \ddot{\phi} = -\frac{2}{r} \dot{\phi} \dot{r} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\phi} \dot{\theta}, \end{cases}$$

Además, imponemos que la geodésica está parametrizada a velocidad constante 1,  $-1$  o  $0$  dependiendo del tipo:

$$(4.24) \quad \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{1 - 2m/r} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = \begin{cases} -1 & \text{temporal} \\ 0 & \text{nula} \\ +1 & \text{espacial} \end{cases}.$$

Nótese que, a diferencia de la anterior sección, no haremos los cálculos manualmente, ya que, son demasiado extensos. En su lugar, nos ayudaremos de un sistema de álgebra computacional [16]. Además, a nuestros problemas se añade que resolver un sistema de varias EDOs de manera exacta es casi imposible; así que las resolveremos numéricamente con SageManifolds.

Aun así, el sistema Ecuación 4.23 tal como lo hemos presentado tiene dos problemas: se trata de EDOs de segundo grado lo que dificulta el análisis, y, más importante, no sabemos cómo prescribir el dato inicial para hallar todos los posibles casos de geodésicas. Por eso, haremos un paso previo de análisis cualitativo en el que intentaremos simplificar las ecuaciones.

#### 4.2.1. Cantidades conservadas y simplificaciones

Una simplificación muy importante es darnos cuenta que las geodésicas están contenidas en un plano, lo que recogemos en la siguiente proposición:

**Proposición 4.6.** *Salvo rotaciones del espacio, las geodésicas cumplen  $\theta = \frac{\pi}{2}$  constante.*

*Demostración.* En Ecuación 4.23, se describe de manera aislada el comportamiento de  $\theta$  como:

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r} \dot{\theta} \dot{r} + \sin \theta \cos \theta \dot{\phi}^2.$$

Por inspección directa verificamos que la constante  $\theta = \frac{\pi}{2}$  es solución. Ahora bien, dada una geodésica con dato inicial  $(t_0, r_0, \theta_0, \phi_0)$  cualquiera, podemos moverla mediante la isometría  $f$  que manda  $\theta_0$  en  $\pi/2$  que no es sino la rotación alrededor del eje de ángulo  $\theta_0$ . A través de  $f$ ,  $\bar{\theta}(0) = \pi/2$  y, por unicidad de las soluciones,  $\bar{\theta} = \pi/2$  en toda la curva. Por lo que vimos en Corolario 3.17 podemos determinar las geodésicas en las nuevas coordenadas, transportarlas con  $f^{-1}$  y, por unicidad, encontramos todas.  $\square$

Podemos continuar simplificando el sistema usando los campos de Killing. No sólo sirven para simplificar la métrica, sino que nos permiten encontrar cantidades conservadas a lo largo de las geodésicas sin tener que resolver las ecuaciones.

**Proposición 4.7.** *Sea  $K$  un campo de Killing para la métrica  $g$  con  $\gamma$  una geodésica. Entonces  $g(K, \dot{\gamma})$  se conserva a lo largo de  $\gamma$ .*

*Demostración.* Se trata de un ejercicio de cálculo usando la caracterización de geodésica del [Teorema 3.14](#). Primero, observamos que por compatibilidad:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(g(K, \dot{\gamma})) = (\nabla_{\dot{\gamma}}g)(K, \dot{\gamma}) + g(K, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) + g(\nabla_{\dot{\gamma}}K, \dot{\gamma}) = g(\nabla_{\dot{\gamma}}K, \dot{\gamma}).$$

Ahora, por la [Proposición 3.20](#) y la simetría de la métrica:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(g(K, \dot{\gamma})) = g(\nabla_{\dot{\gamma}}K, \dot{\gamma}) = -g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}K) = -g(\nabla_{\dot{\gamma}}K, \dot{\gamma}) = -\nabla_{\dot{\gamma}}(g(K, \dot{\gamma})).$$

Por tanto,

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(g(K, \dot{\gamma})) = 0.$$

□

Si tomamos los campos de Killing de la métrica de Schwarzschild ([Teorema 4.5](#), [Ecuación 4.11](#)) con  $\dot{\gamma} = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ , tenemos:

- Caso  $K = \frac{\partial}{\partial t}$ .

$$(4.25) \quad g(K, \dot{\gamma}) = K^\nu g_{\mu\nu} \dot{\gamma}^\mu = K^t g_{tt} \dot{\gamma}^t = \boxed{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = e \text{ (constante)}}.$$

- Caso  $K = \frac{\partial}{\partial \phi}$ .

$$(4.26) \quad g(K, \dot{\gamma}) = K^\phi g_{\phi\phi} \dot{\gamma}^\phi = - (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi} = \boxed{-r^2 \dot{\phi} = -l \text{ (constante)}}.$$

Obsérvese que hemos utilizado que  $\theta = \pi/2$  en toda la curva.

#### 4.2.2. Orbitas y potencial

En esta sección vamos a tratar con trayectorias de partículas masivas. Es un postulado de la relatividad general que las partículas masivas siguen trayectorias  $\gamma$  en las que  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ . A lo largo de toda la sección trabajaremos bajo ese supuesto.

Buscamos un nuevo sistema que determine las geodésicas en función de las cantidades conservadas  $l$  y  $e$ :

**Proposición 4.8.** *El sistema [Ecuación 4.23](#) es equivalente a:*

$$(4.27) \quad \begin{cases} \dot{t}^2 = \frac{e}{1 - 2m/r}, \\ \dot{\phi}^2 = \frac{l}{r^2}, \\ \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{m}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{ml^2}{r^3} = \frac{e^2 - 1}{2}. \end{cases}$$

*Demostración.* Las primeras dos ecuaciones se deducen directamente de la [Ecuación 4.25](#) y la [Ecuación 4.26](#). Para la última, escribimos usando la [Ecuación 4.24](#):

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{1}{1 - 2m/r} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \\ &= \frac{e^2}{1 - 2m/r} - \frac{1}{1 - 2m/r} \dot{r}^2 - \frac{l^2}{r^2}, \end{aligned}$$

y, manipulando la fórmula llegamos al resultado.  $\square$

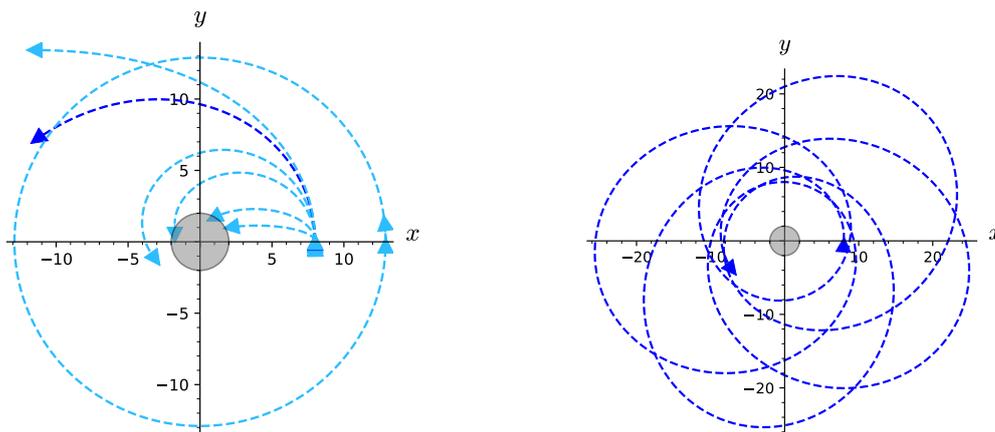
Si nos fijamos en [Ecuación 4.27](#) queda patente que es mucho más simple que [Ecuación 4.23](#) ya que se tratan de ecuaciones de primer orden y no de segundo. Esa es la primera ventaja que nos facilita la resolución numérica. La segunda es que podemos caracterizarla como una ecuación del movimiento clásico de física.

$$\underbrace{\frac{1}{2} \dot{r}^2}_{\text{energía cinética}} - \underbrace{\left(\frac{m}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{ml^2}{r^3}\right)}_{V, \text{ potencial}} = \underbrace{\frac{e^2 - 1}{2}}_{\text{energía total (conservada)}}.$$

Simplificando todavía más:

$$(4.28) \quad \frac{1}{2} \dot{r}^2 + V(r) = E, \quad \text{donde} \quad V(r) = -\frac{m}{r} + \frac{l^2}{2r^2} - \frac{ml^2}{r^3}.$$

Aquí es cuándo entra en juego la tercera ventaja de [Ecuación 4.27](#) y es que, como  $l$  es conservada, queda determinada a partir de las condiciones iniciales  $(\dot{t}(0), \dot{r}(0), \dot{\theta}(0), \dot{\phi}(0))$ . De esta forma, podemos explorar todos los tipos de órbitas con facilidad como se ve en la [Figura 4.2](#).



(a) Varias geodésicas para partículas masivas.

(b) Primer plano de geodésica elíptica resaltada en azul oscuro en [Figura 4.2a](#).

Figura 4.2: Cálculo numérico de geodésicas del [Ecuación 4.27](#) y gráficas de trayectorias.



# Bibliografía

---

- [1] Robert M. Wald. *General relativity*. Chicago: University of Chicago Press, 1984. ISBN: 978-0-226-87032-8 978-0-226-87033-5.
- [2] Bernard F. Schutz. *A first course in general relativity*. 2nd ed. Cambridge ; New York: Cambridge University Press, 2009. ISBN: 978-0-521-88705-2.
- [3] Sean M. Carroll. “Lecture Notes on General Relativity”. En: *arXiv:gr-qc/9712019* (2 de dic. de 1997). arXiv: [gr-qc/9712019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019). URL: <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019>.
- [4] Manfredo Perdigão do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Revised & updated second edition. Mineola, New York: Dover Publications Inc, 2016. ISBN: 978-0-486-80699-0.
- [5] Frederic P Schuller. “A thorough introduction to the theory of general relativity”. International Winter School on Gravity and Light. 2015.
- [6] Tristan Needham. *Visual differential geometry and forms: a mathematical drama in five acts*. Princeton Oxford: Princeton University Press, 2021. ISBN: 978-0-691-20370-6 978-0-691-20369-0.
- [7] Dennis Barden y Charles Thomas. *An introduction to differential manifolds*. OCLC: 1244429500. 2003. ISBN: 978-1-911298-23-6.
- [8] V. Muñoz, Á. González-Prieto y J. Á. Rojo. *Geometry and topology of manifolds: surfaces and beyond*. Graduate studies in mathematics 208. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2020. ISBN: 978-1-4704-6132-4.
- [9] Barrett O’Neill. *Elementary differential geometry*. Rev. 2nd ed. OCLC: ocm62493605. Amsterdam ; Boston: Elsevier Academic Press, 2006. ISBN: 978-0-12-088735-4.
- [10] Benjamin Crowell. *General Relativity*. Physics. LibreTexts, 2022. URL: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Relativity/General\\_Relativity\\_\(Crowell\)](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Relativity/General_Relativity_(Crowell)) (visitado 16-05-2022).
- [11] John M. Lee. *Introduction to Riemannian manifolds*. New York, NY: Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN: 978-3-319-91754-2.

- 
- [12] J.J. Sylvester. “XIX. *A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares*”. En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 4.23 (ago. de 1852). ISSN: 1941-5982, 1941-5990. DOI: [10.1080/14786445208647087](https://doi.org/10.1080/14786445208647087). URL: <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14786445208647087>.
- [13] Clifford M. Will. “The Confrontation between General Relativity and Experiment”. En: *Living Reviews in Relativity* 17.1 (dic. de 2014). ISSN: 2367-3613, 1433-8351. DOI: [10.12942/lrr-2014-4](https://doi.org/10.12942/lrr-2014-4). arXiv: [1403.7377](https://arxiv.org/abs/1403.7377) [[astro-ph](#), [physics:gr-qc](#), [physics:hep-th](#)]. URL: <http://arxiv.org/abs/1403.7377> (visitado 17-05-2022).
- [14] Physics Unsimplified. “Lectures on General Relativity”. 2019.
- [15] Metin Arik y M. Tuna Pesen. “A Perspicuous Description of the Schwarzschild Black Hole Geodesics”. En: *arXiv:1611.02135 [gr-qc]* (7 de nov. de 2016). arXiv: [1611.02135](https://arxiv.org/abs/1611.02135). URL: <http://arxiv.org/abs/1611.02135>.
- [16] The SageMath Developers. *sagemath/sage: 9.5*. Ver. 9.5. 30 de ene. de 2022. DOI: [10.5281/ZENODO.593563](https://doi.org/10.5281/ZENODO.593563). URL: <https://zenodo.org/record/593563>.
- [17] Paul R. Halmos. *Finite-dimensional vector spaces*. Undergraduate texts in mathematics. New York: Springer-Verlag, 1974. ISBN: 978-0-387-90093-3.

# APÉNDICE A

## Conceptos previos de geometría diferencial

---

En este apéndice se fijan las definiciones y notación de geometría diferencial que se usarán a lo largo del trabajo.

**Definición A.1 (Variedad diferenciable).** Una variedad diferenciable es una triplete  $(M, \tau, \mathcal{A})$  donde  $M$  es un espacio topológico con topología  $\tau$  y  $\mathcal{A} = (U_\alpha, x_\alpha)_\alpha$  un atlas. Es necesario que  $U_\alpha$  sea un recubrimiento abierto de  $M$  y  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $n$  fijo sea un homomorfismo sobre su imagen. A un elemento  $(U_\alpha, x_\alpha)$  de  $\mathcal{A}$  se le llama una carta de  $M$  y debe cumplirse que para cualesquiera cartas  $(x, U), (y, V) \in \mathcal{A}$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ :

$$(y \circ x^{-1}) : x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ es diferenciable.}$$

**Observación.** A menudo usaremos  $M$  para referirnos a la variedad diferenciable cuando no haya ambigüedad sobre la topología ni el atlas.

**Definición A.2 (Función suave entre variedades).** Dadas dos variedades  $(M, \tau, \mathcal{A})$  y  $(N, \tau', \mathcal{B})$ , una función  $f : M \rightarrow N$  es suave si es continua y, en cualesquiera cartas  $(U, x) \in \mathcal{A}$ ,  $(V, y) \in \mathcal{B}$ , tenemos que  $(y \circ f \circ x^{-1}) : x(f^{-1}(V) \cap U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es suave en el sentido habitual.

**Definición A.3 (Difeomorfismo).** Dadas dos variedades  $M$  y  $N$ , una función  $f : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo si es biyectiva y tanto  $f$  como  $f^{-1}$  son suaves como aplicaciones entre variedades ([Definición A.2](#)).

**Definición A.4 (Espacio tangente en un punto).** Dada una variedad  $M$ , y un punto  $p \in M$ , se define el espacio tangente como el conjunto de todas las derivaciones en ese punto.

$$T_p M = \{c \mid c : \mathbb{R} \rightarrow M \text{ curva suave en un entorno de } p, c(0) = p\} / \sim,$$

donde  $[c] \sim [\bar{c}]$  si  $(x \circ c)'(0) = (x \circ \bar{c})'(0)$  con  $(U, x)$  una carta alrededor de  $p$ . Es fácil ver que relación de equivalencia  $\sim$  no depende de la carta elegida.

Interpretamos los elementos de  $T_p M$  como derivaciones en el siguiente sentido: sean  $u \in T_p M$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  y denotemos por  $c_u$  la curva asociada a  $u$ :

$$u(f) = [c_u](f) = c'_u(0)(f) = \underbrace{(f \circ c_u)'}_{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}(0).$$

Obsérvese que tenemos tres notaciones distintas para referirnos al mismo objeto  $u = [c_u] = c'_u(0)$ .

**Proposición A.5 (Base canónica del espacio tangente en un punto).** Dada  $(M, \theta, \mathcal{A})$ , si fijamos una carta  $(U, x)$  centrada en un punto  $p$  ( $x(p) = 0$ ), donde  $x = (x_1 \dots x_n)$  con  $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  podemos dar una base de  $T_p M$  de la siguiente forma:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}_{i \in \{1 \dots n\}} \quad \text{con} \quad \frac{\partial}{\partial x^i}(f) \Big|_p = (f \circ x_i^{-1})'(x_i(p)).$$

**Definición A.6 (Espacio cotangente / Dual al espacio tangente).** Dada una variedad  $M$  y un punto  $p$ , definimos el espacio dual al espacio tangente  $T_p M$ :

$$(T_p^* M) = \{f : T_p M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lineal}\}.$$

**Proposición A.7 (Base dual del espacio cotangente).** Dada  $M$  variedad diferenciable, si fijamos una carta  $(U, x)$  alrededor de un punto  $p$ , donde  $x = (x_1 \dots x_n)$  con  $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  podemos dar una base en  $T_p^* M$  como sigue:

$$\{dx^i\}_{i \in \{1 \dots n\}} \quad \text{con} \quad dx^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Técnicamente podemos dar otras bases del espacio que no guarden esta relación con los elementos de  $T_p M$ , pero nos interesarán menos.

**Definición A.8 (Diferencial de una función).** Sean  $M$  y  $N$  variedades diferenciables y sea  $f : M \rightarrow N$  una función suave. Se define la diferencial de  $f$  en un punto  $p \in M$  como:

$$\begin{aligned} df_p : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} N \\ [\gamma] &\mapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

**Definición A.9 (Fibrado tangente).** Es la unión disjunta de todos los espacios tangentes para cada punto de la variedad. Se puede pensar en los elementos como pares ordenados  $(p, u) : u \in T_p M$ ,

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

**Observación.** Se puede dotar a  $TM$  de estructura de variedad diferenciable ([7, pág. 28]) lo que nos permitirá definir un campo vectorial suave más adelante.

**Definición A.10 (Campo vectorial).** Un campo vectorial es una aplicación  $X : M \rightarrow TM$  diferenciable entre variedades tal que

$$\pi \circ X = id.$$

donde  $\pi : TM \rightarrow M$  es la proyección sobre  $M$ , con  $\pi(T_p M) = p$ . Es decir, los campos son secciones del fibrado tangente.

Igual que con los vectores, los campos se pueden interpretar como derivaciones:

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ f &\mapsto X(f) \text{ con } X(f)(p) = df_p(X(p)). \end{aligned}$$

**Definición A.11.** El espacio de todos los campos vectoriales sobre una variedad  $M$  se denota  $\Gamma(TM)$ . La notación se debe a que los campos exactamente son las secciones del fibrado tangente.

Ahora que hemos definido con rigor lo que es un campo, podemos explicar qué quiere decir tomar la derivada de una curva. Si  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow M$  una curva diferenciable, denotamos por  $\dot{\varphi}$  el campo vectorial definido sólo a lo largo de la curva  $\varphi$  y que en cada punto es igual a su vector tangente. Esta noción natural requiere de cierto trabajo notacional. Sea  $\phi_{t_0}(t) = \varphi(t + t_0)$ , comprobamos,

$$\begin{aligned} \phi_{t_0}(0) &= p, \\ \dot{\phi}_{t_0}(0) &= \dot{\varphi}(t_0), \end{aligned}$$

que, ahora sí, nos recuerda a [Definición A.4](#) y fijamos:

$$(A.1) \quad \dot{\varphi}(t) = [\phi_t].$$

Abusando de la notación, a veces utilizaremos  $\dot{\varphi}$  para referirnos al vector tangente en coordenadas. Si  $(U, x)$  es una carta, se puede escribir:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

**Definición A.12 (Corchete de Lie / Conmutador).** El corchete de Lie es una aplicación  $[\cdot, \cdot]$  definida por:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \Gamma(M) \times \Gamma(M) &\rightarrow \Gamma(M) \\ (X, Y) &\mapsto [X, Y] = X \circ Y - Y \circ X, \end{aligned}$$

donde estamos componiendo campos usando la caracterización de los campos como derivaciones. Es decir, dada una función  $f$ ,

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$



# APÉNDICE B

## Notación y tensores

---

En este capítulo fijamos las definiciones que usaremos para trabajar con tensores y los convenios de notación comúnmente utilizados en la literatura de relatividad general.

### B.1. Tensores

**Definición B.1 (Tensor).** Un tensor de valencia  $(p, q)$  sobre un espacio vectorial  $V$  es una aplicación multilineal  $T$ :

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_p \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_q \rightarrow \mathbb{R},$$

donde  $V^* = \{\phi : V \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi \text{ lineal}\}$  es el espacio dual a  $V$ .

**Observación.** Con esta notación, un covector  $\omega$  es un tensor  $(0, 1)$  y un vector  $v$  es un tensor  $(1, 0)$ .

**Definición B.2 (Campo tensorial).** Un campo tensorial- $(p, q)$   $Z$  en una variedad  $M$  es aplicación diferenciable entre variedades:

$$Z : M \rightarrow T^{p,q}M = \bigsqcup_{x \in M} T_x^{p,q}M$$

$$x \mapsto Z(x),$$

tal que  $\pi \circ Z = id$  con  $\pi : T^{p,q}M \rightarrow M$  la proyección. Es decir, son secciones del fibrado tensorial- $(p, q)$ .

**Observación.** Nuevamente dotamos a  $T^{p,q}M$  con estructura de variedad diferenciable. Más generalmente, a este tipo de estructuras se las conoce como fibrados vectoriales ([7, pág. 50]).

**Observación.**

- Las funciones son campos tensoriales- $(0, 0)$  (los tensores- $(0, 0)$  son constantes).

- Los campos vectoriales son campos tensoriales-(1, 0), pero preferiremos la notación  $\Gamma(TM)$  en vez de  $\Gamma(T^{1,0}M)$ .
- Los campos covectoriales son campos tensoriales-(0, 1), pero es más común denotarlos  $\Gamma(T^*M)$  en vez de  $\Gamma(T^{0,1}M)$ .

**Observación.** A menudo evaluaremos  $Z$  sobre campos tensoriales en el siguiente sentido:

$$Z(\omega_{j_1} \dots \omega_{j_q}, e_{i_1} \dots e_{i_p})(p) = Z(\omega_{j_1}(p) \dots \omega_{j_q}(p), e_{i_1}(p) \dots e_{i_p}(p)),$$

donde  $Z(\omega_{j_1} \dots \omega_{j_q}, e_{i_1} \dots e_{i_p})$  es una función de  $C^\infty(M)$ .

Cuando trabajemos en coordenadas con tensores emplearemos la siguiente definición que distingue superíndices de subíndices:

**Definición B.3 (Componentes de un tensor).** En un espacio vectorial  $V$ , un tensor-( $p, q$ )  $T$  con respecto a una base  $(\{e_i\}$  en  $V$ ,  $\{\omega_j\}$  en  $V^*$ ), tiene componentes:

$$T_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_p} = T(\omega_{j_1} \dots \omega_{j_p}, e_{i_1} \dots e_{i_q}) \quad 1 \leq i_1 \dots i_q, j_1 \dots j_p \leq \dim(V).$$

Donde los superíndices indexan en  $V^*$  y los subíndices en  $V$  por convenio.

**Ejemplo B.4.** Usando los componentes podemos evaluar un campo tensorial en coordenadas fácilmente:

$$T(\omega, X) = \sum_{i,j} \omega_i T_j^i X^j \in C^\infty(U),$$

con  $U \subset M$  la carta correspondiente.

**Ejemplo B.5.** También podemos calcular la expresión local de un campo vectorial en función de una base:

$$X(p) = \sum_i X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p M.$$

## B.2. Notación

Las fórmulas que involucran tensores, como es común en relatividad, a menudo necesitan sumatorios en muchos índices lo que dificulta su lectura. Además, como tenemos tantos objetos, nos gustaría saber si estamos tratando con un vector o covector a simple vista. Para aliviar ambos problemas a menudo se emplean los siguientes dos convenios:

- **Notación de Einstein:** Para mejorar la legibilidad, los sumatorios no se escriben explícitamente, sino que se entiende que si hay una pareja del mismo índice,

uno arriba y otro abajo, hay un sumatorio. Por ejemplo, si  $T$  lineal y  $X$  es un campo vectorial, son equivalentes:

$$T(X) = T\left(\sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_j v_j T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$T(X) = T\left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = v_j T\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

Como siempre trabajamos con aplicaciones lineales, no hay ambigüedad si el sumatorio está dentro o fuera porque:

$$\sum_j T\left(v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = T\left(\sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

- Notación abstracta de índices de Penrose:** Muchas veces es difícil recordar qué valencia tienen los tensores en un cálculo, especialmente si estamos bajando y subiendo índices. Por ello y por ergonomía, muchas veces los cálculos en física se hacen directamente en coordenadas. La solución natural a la par que elegante la dio Penrose en su convenio de índices. Consiste en usar los índices para recordar la valencia de los tensores y nada más. La notación es idéntica a cómo se trabaja en coordenadas facilitando los cálculos, pero con la garantía de que estos cálculos que hacemos son invariantes.

En este trabajo emplearemos siempre este convenio salvo que hablemos de unas coordenadas concretas; distinción que será clara dependiendo del contexto.

